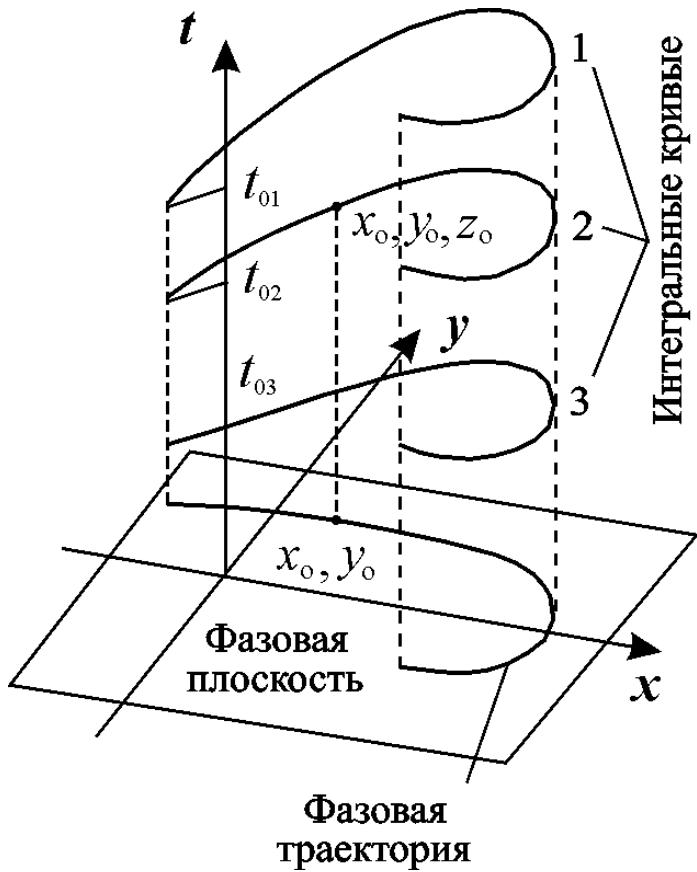


Качественное исследование

Анализ устойчивости
стационарного состояния
системы двух автономных
дифференциальных
уравнений

Траектории системы в пространстве (x, y, t)



Жюль Анри Пуанкарé
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния



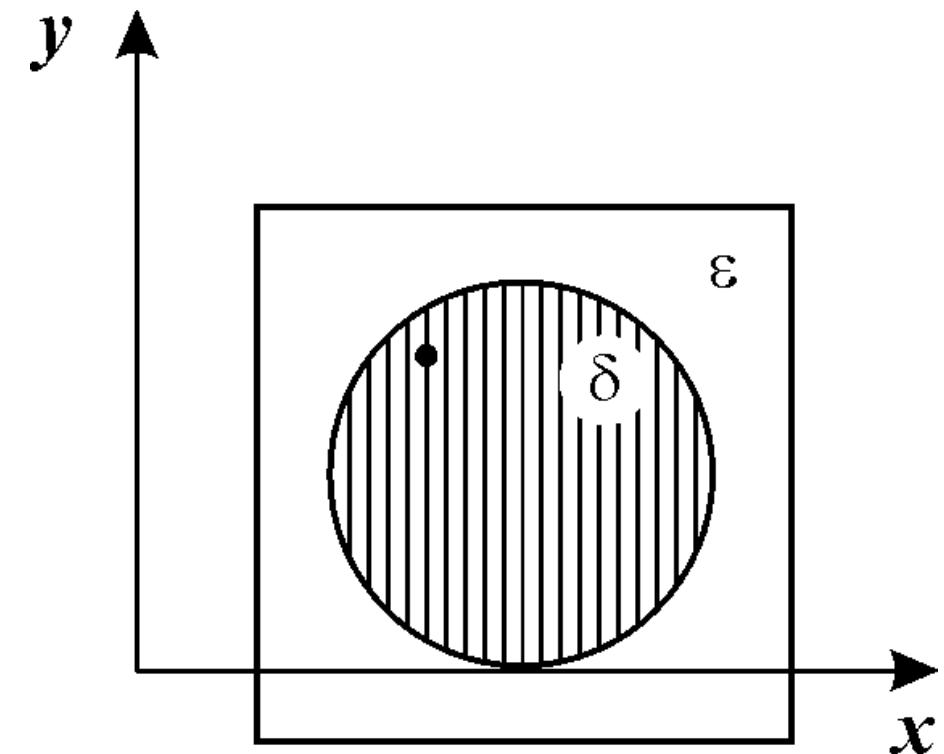
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Ляпунóв Алексáндр Михáйлович (1857 –1918) –
русский математик, создал теорию устойчивости
состояний равновесия и движения механических систем
с конечным числом параметров.

Работал также в области дифференциальных
уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ , никогда не достигнет границы ε .



Устойчивость стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

условие
нетривиального
решения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$

$$y = Be^{\lambda t}$$

Устойчивость определяется действительной частью собственного числа λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Если числа λ_1, λ_2 – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа λ_1, λ_2 – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если λ_1, λ_2 – действительны и разных знаков – седло

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные, решение ищется в виде $x = e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t}$

Мнимая часть не оказывается на устойчивости

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 < 0$ – устойчивый фокус

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 > 0$ – неустойчивый фокус

Если λ_1, λ_2 – чисто мнимые и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 = 0$ – центр

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

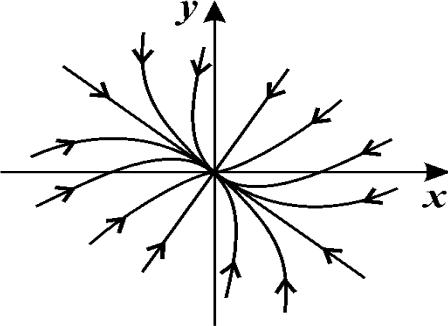
Поведение фазовых траекторий
системы двух линейных ОДУ в
окрестности стационарного состояния
при разных значениях
характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

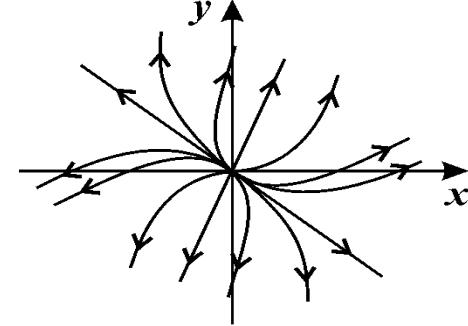
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

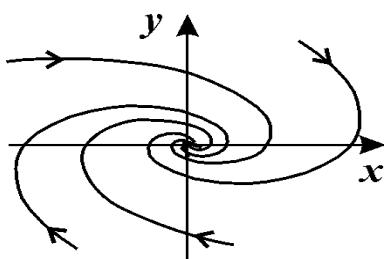
Формула Эйлера



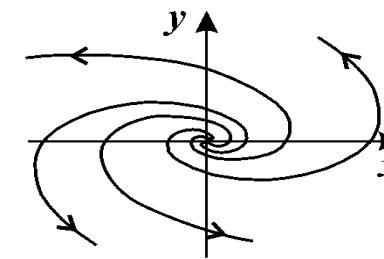
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и
отрицательны)



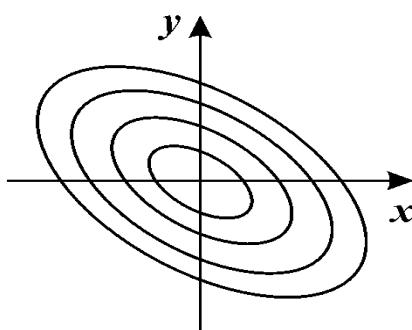
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и
положительны)



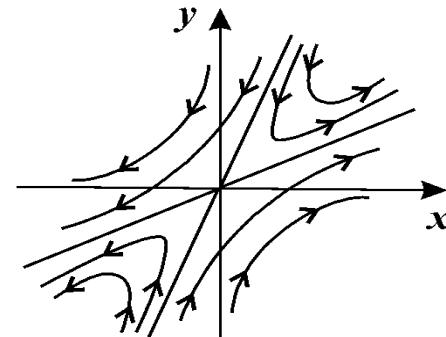
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$)



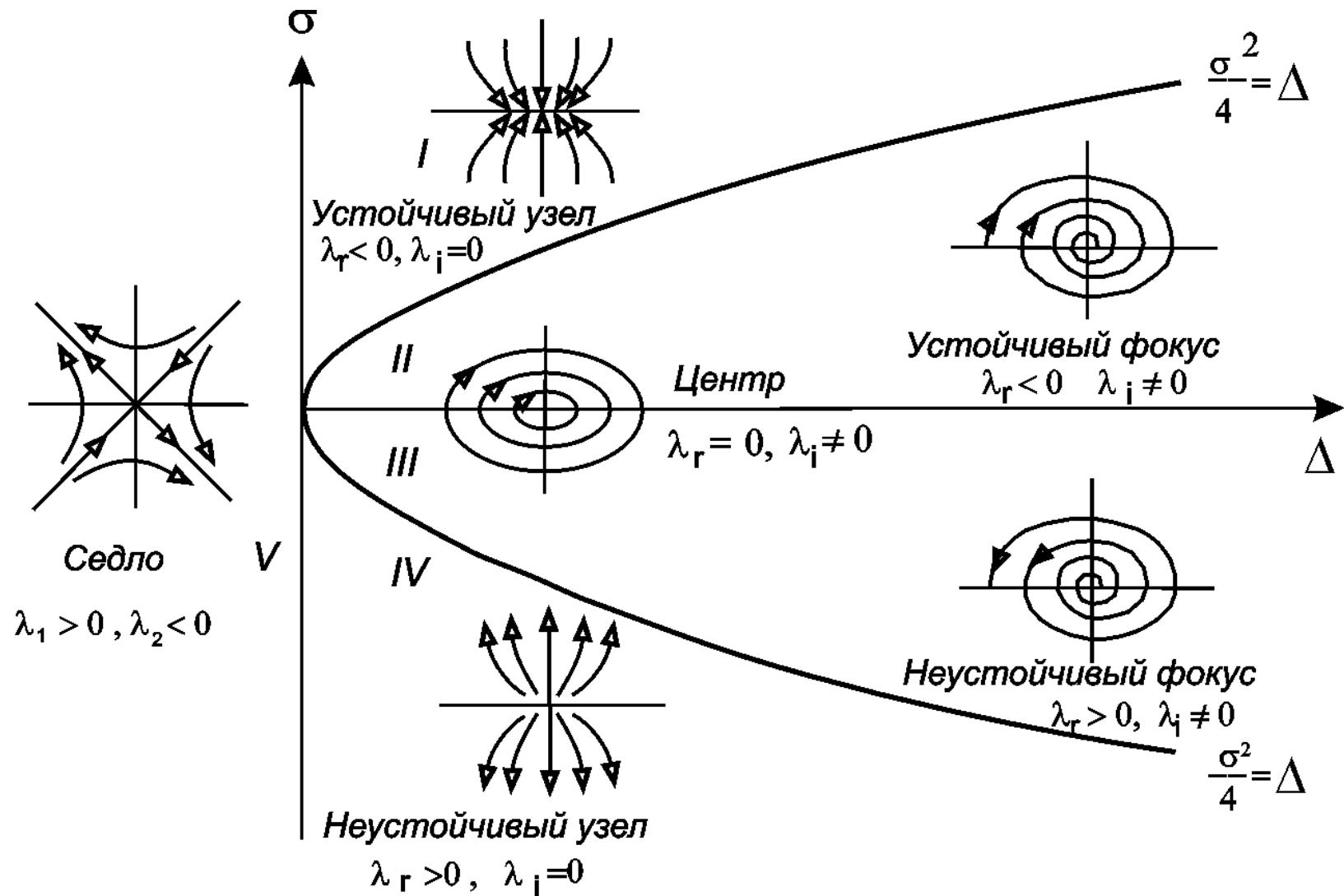
Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и
разных знаков)

Бифуркационная диаграмма

Фазово-параметрическая



$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$

$$y = Be^{\lambda t}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$

Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta),$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta).$$

$$\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dt} = 0$$

Разложение правой части в ряд Тейлора. Линеаризация системы

$$\frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x}, \bar{y}) + a\xi + b\eta + (p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots) + \dots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x}, \bar{y}) + c\xi + d\eta + (q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots) + \dots, \quad P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= P_x'(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}), \\ c &= Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).\end{aligned}$$

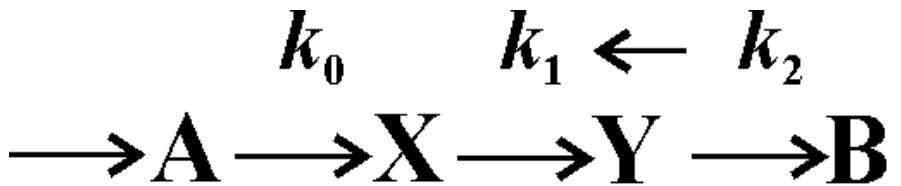
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Если оба корня характеристического уравнения имеют **отрицательную** действительную часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то **состояние равновесия устойчиво**;

- если хотя бы один корень имеет **положительную** действительную часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то **состояние равновесия неустойчиво**.
- Если действительные части обоих корней характеристического уравнения равны нулю или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия, и необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. *Elements of Physical Biology*, 1925)



$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

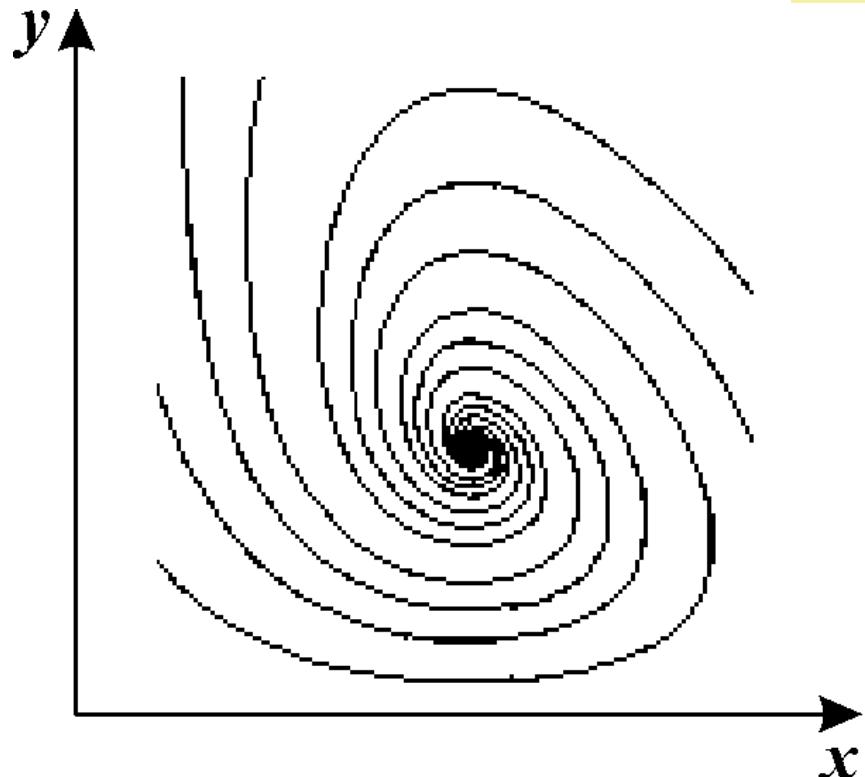


Лотка Альфред Джеймс ([англ.](#) Alfred James Lotka), [1880](#) – 1949 – [американский математик](#), физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы Лотки

а – устойчивый фокус,

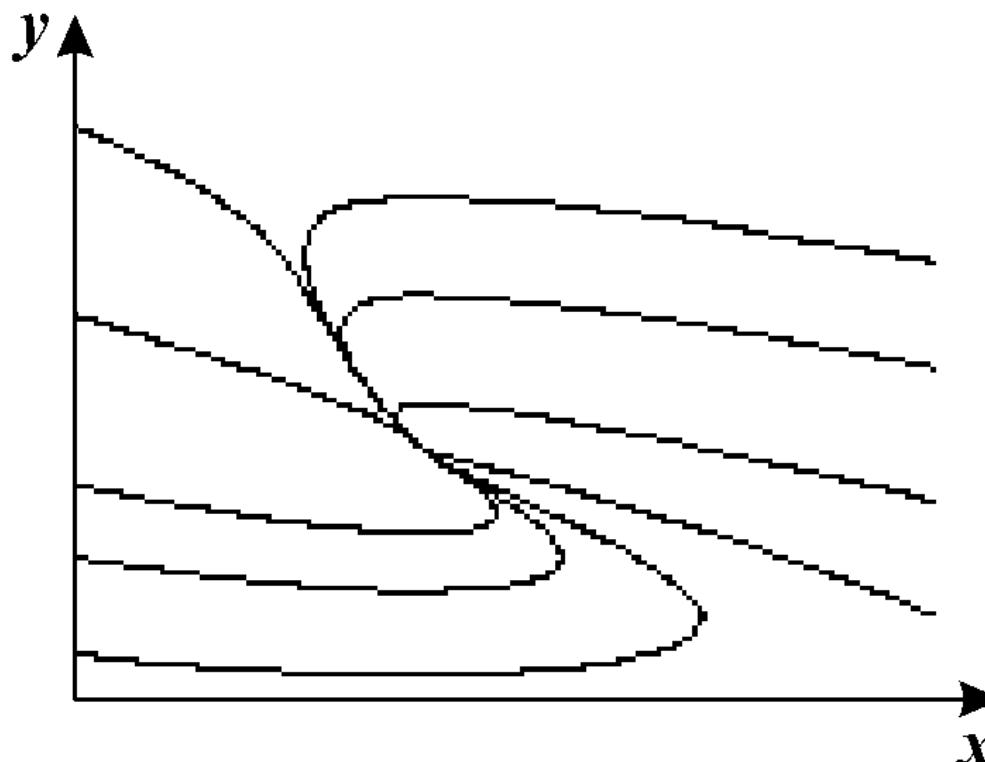
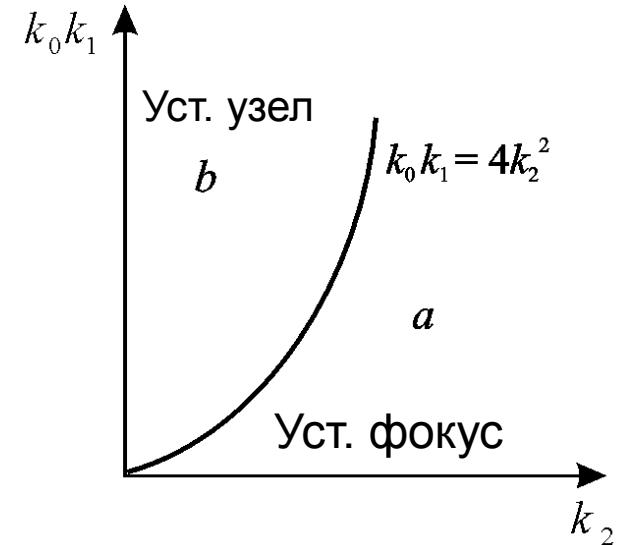
б – устойчивый узел.



$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2} \right)^2 - 4 k_0 k_1} \right]$$



$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$

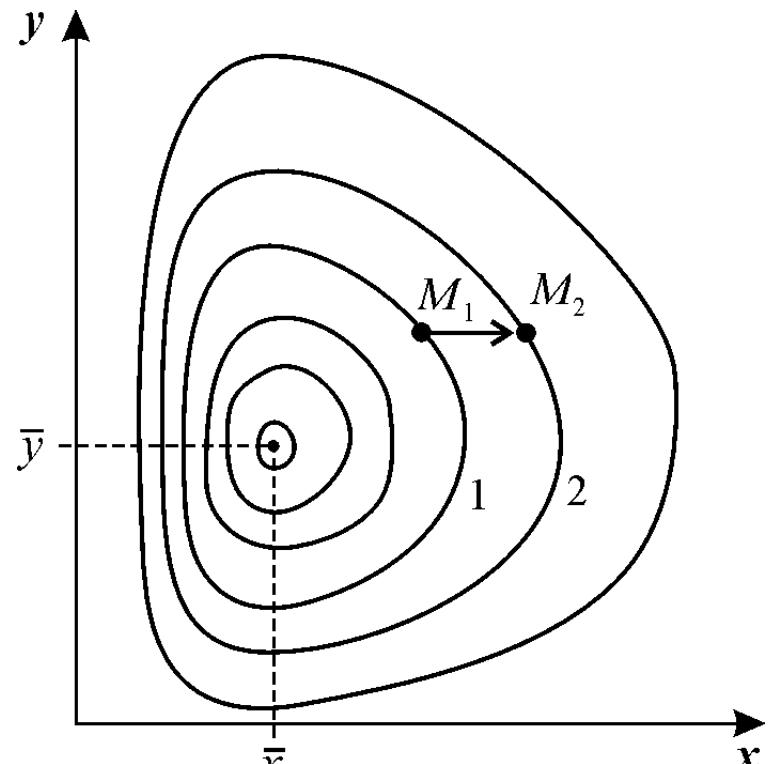
Vito
Volterra



X – численность жертв
Y – численность хищников

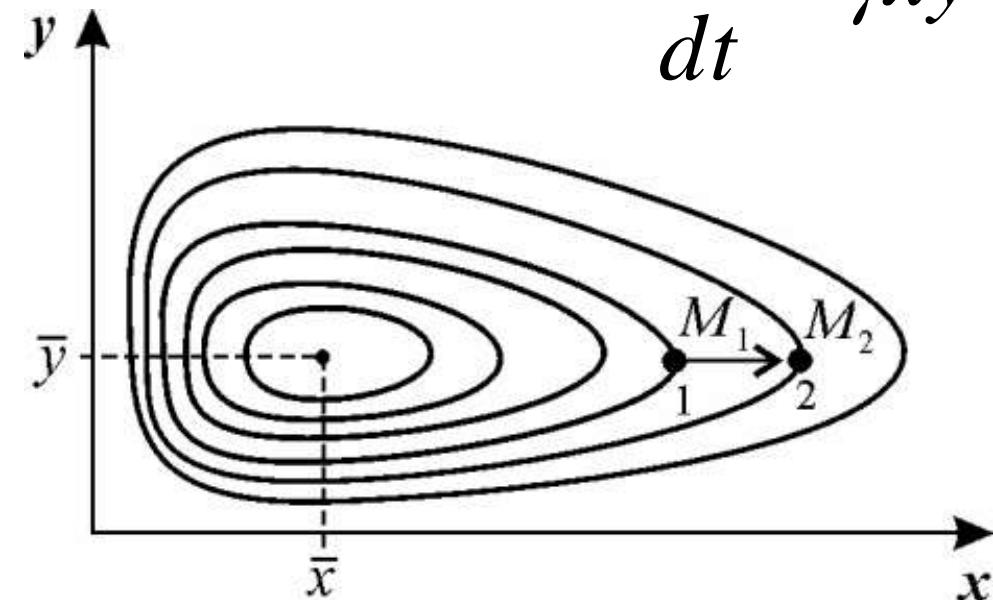
Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



a

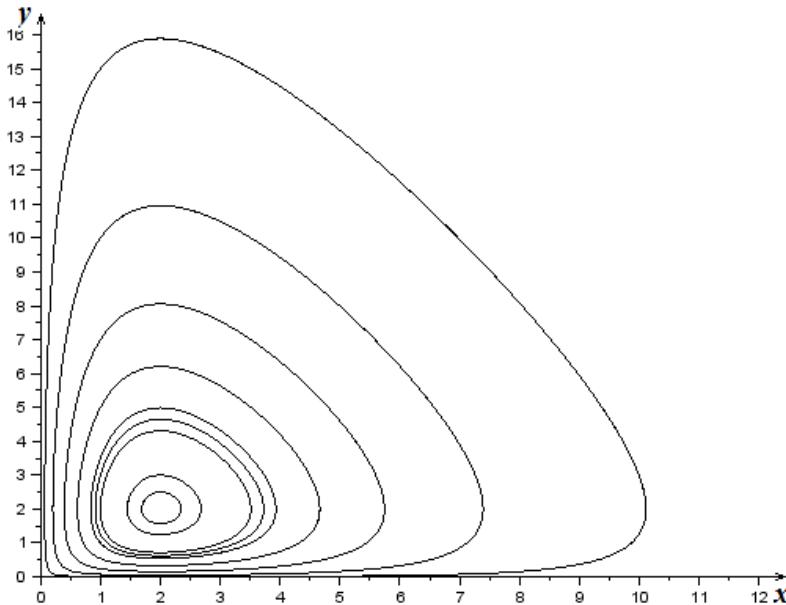
$$\alpha = 4, \beta = 0.3, \gamma = 0.4, \delta = 0.4$$



b

$$\alpha = 2, \beta = 0.3, \gamma = 0.4, \delta = 0.4$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$



Volterra predator–prey model
describing continuous oscillations of
the population numbers.

(a) phase pattern;

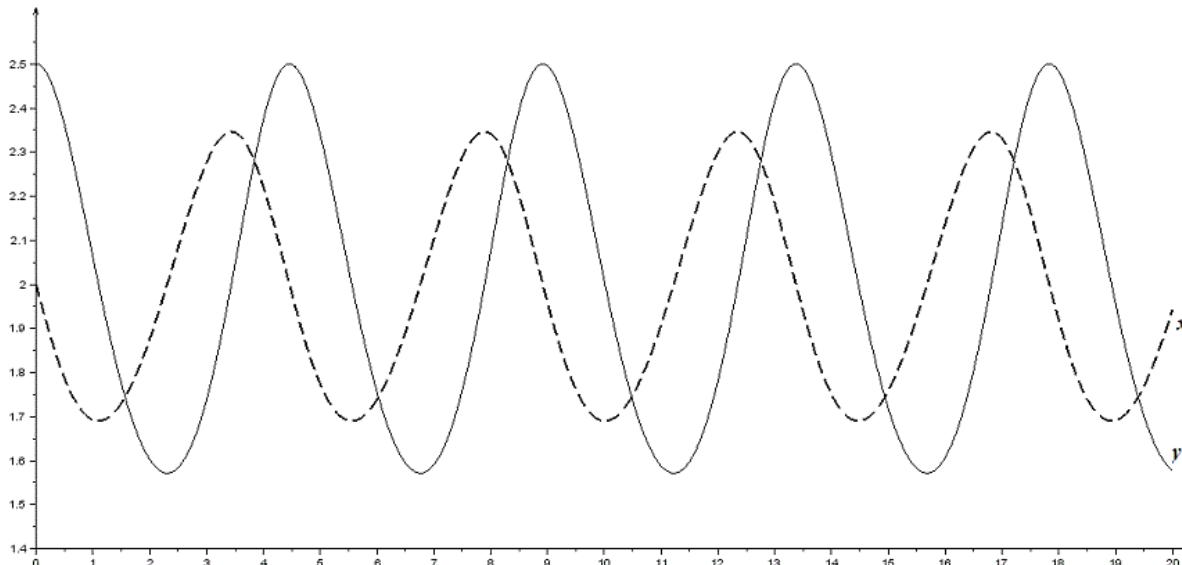
(b) dependence of the numbers
of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

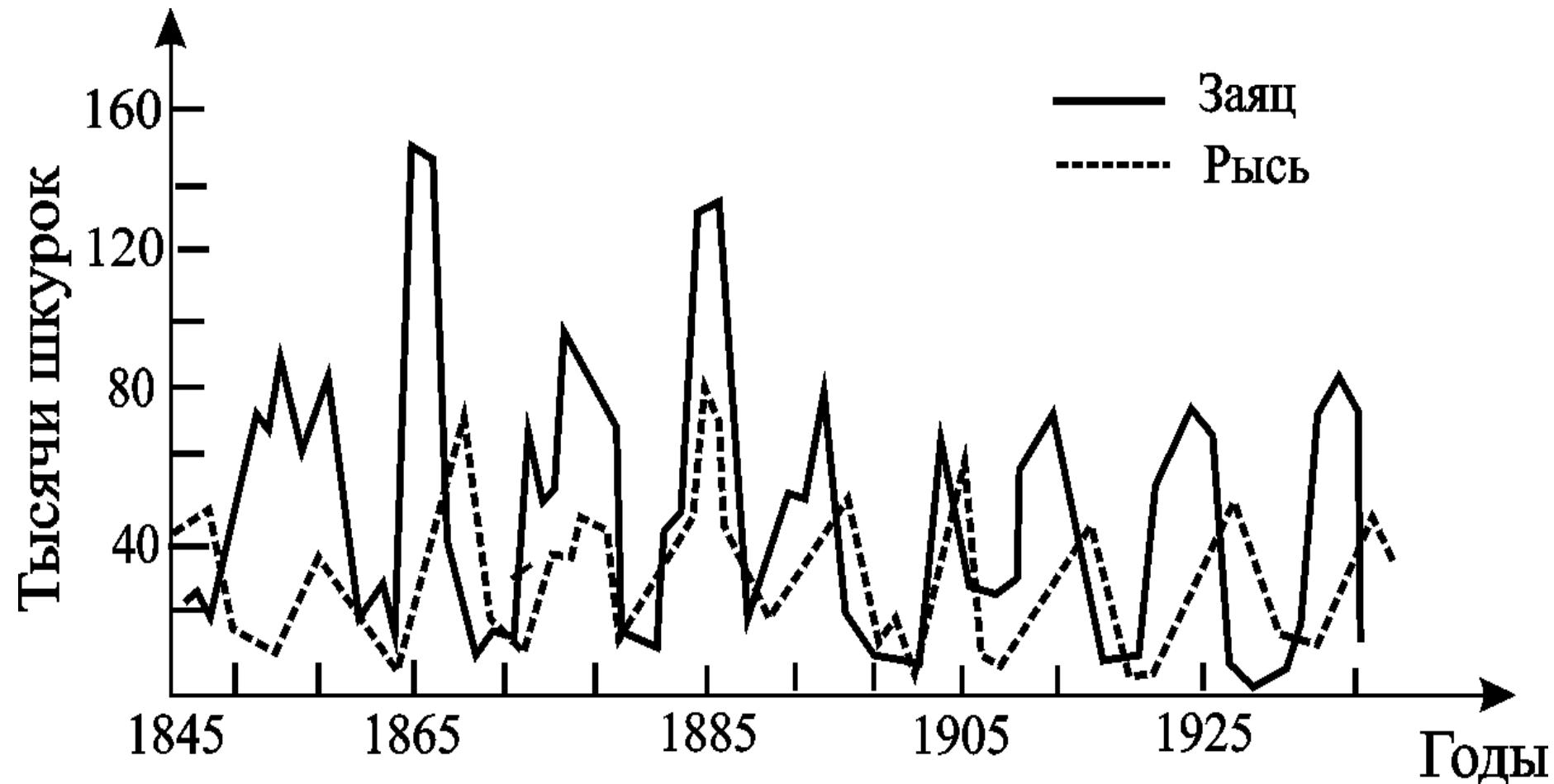
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)

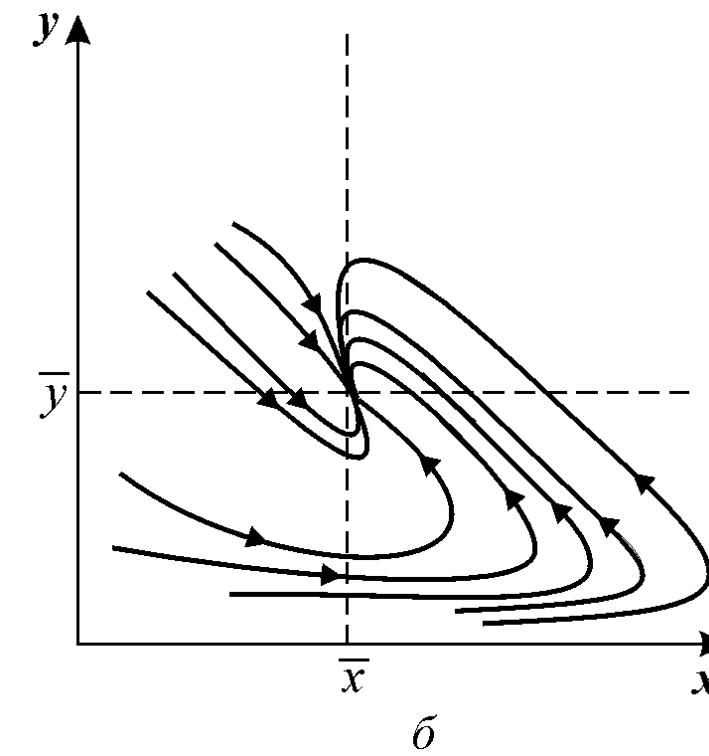
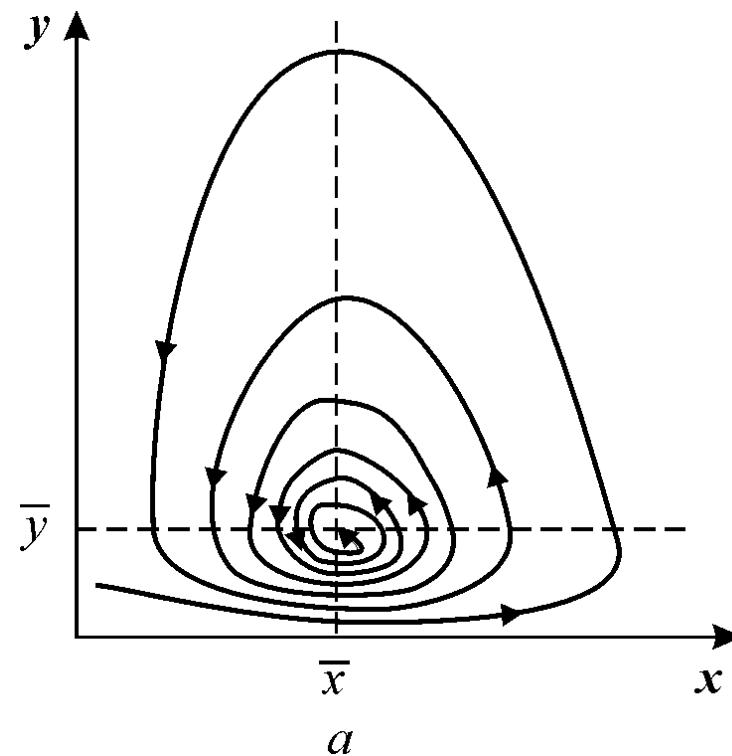


Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$

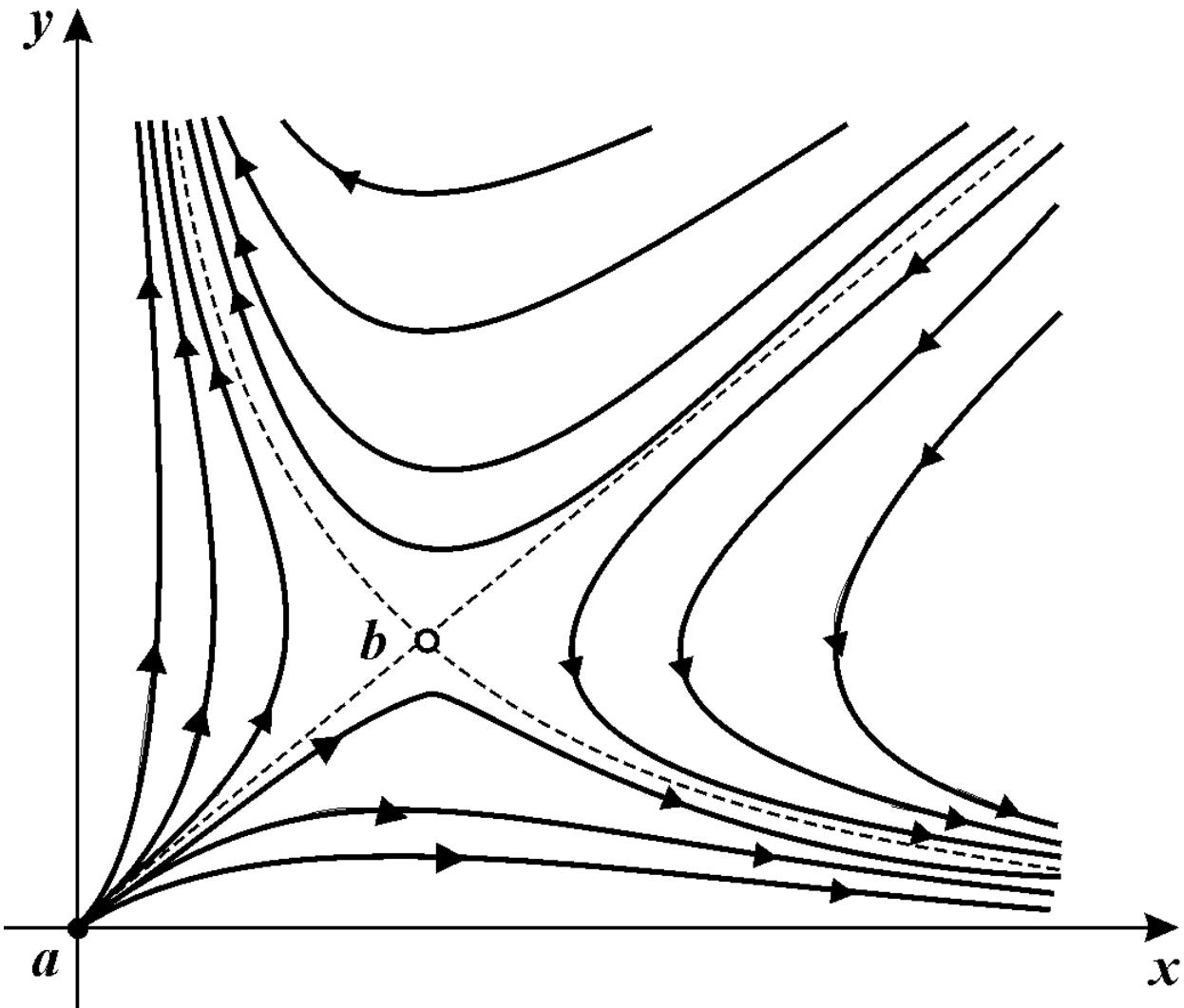
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 18, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 5, \\ \delta_y &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 1, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 1, \\ \delta_y &= 1\end{aligned}$$

Отбор одного из двух равноправных (конкуренция)



Дмитрий Сергеевич Чернавский (1926-2016)

Книги: Синергетика и информатика (2004);
Ю.М.Романовский, Н.В.Степанова,
Д.С.Чернавский. Математическая биофизика
1985, 2004

$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$
$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$