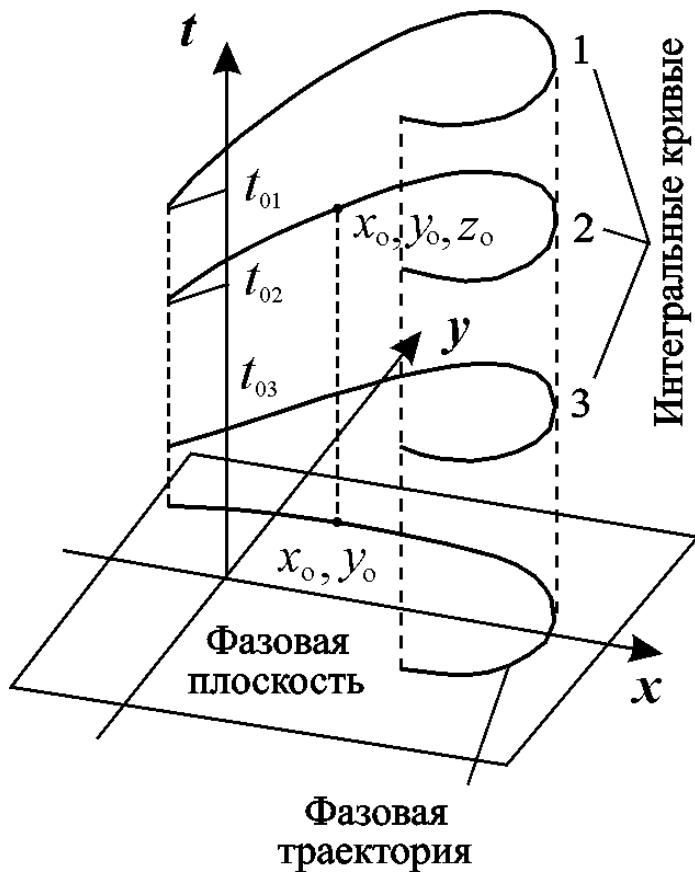


Качественное исследование

Анализ устойчивости
стационарного состояния
системы двух автономных
дифференциальных
уравнений

Траектории системы в пространстве (x, y, t)



Жюль Анри Пуанкаре
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния

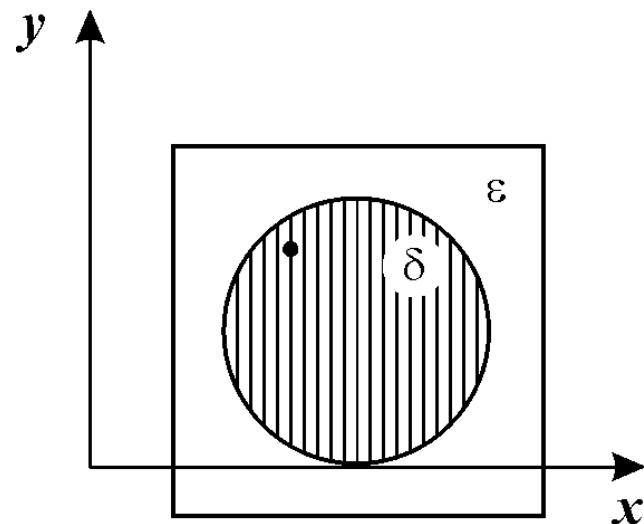


$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Ляпунóв Алексáндр Михáйлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ , никогда не достигнет границы ε .



Устойчивость стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде: $x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$

$$\lambda A = aA + bB,$$

Условие
нетривиального
решения

$$\lambda B = cA + dB.$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Устойчивость определяется действительной частью собственного числа λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Если числа λ_1, λ_2 – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа λ_1, λ_2 – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если λ_1, λ_2 – действительны и разных знаков – седло

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные, решение ищется в виде $x = e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t}$

Мнимая часть не сказывается на устойчивости

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 < 0$ – устойчивый фокус

Если λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 > 0$ – неустойчивый фокус

Если λ_1, λ_2 – чисто мнимые и $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 = 0$ – центр

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

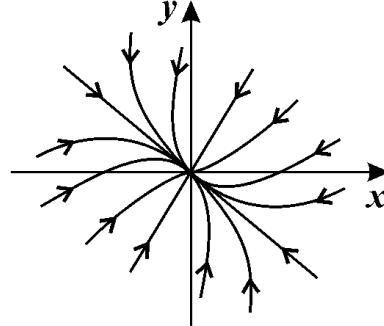
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

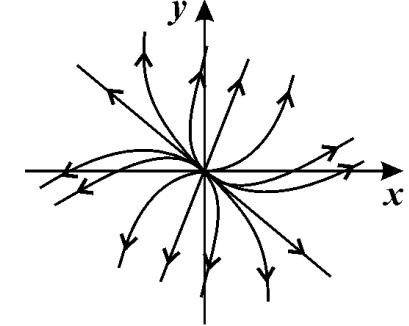
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

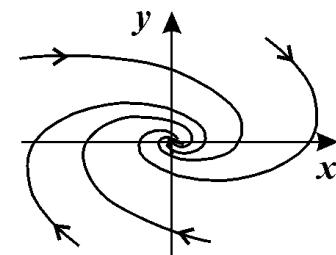
Формула Эйлера



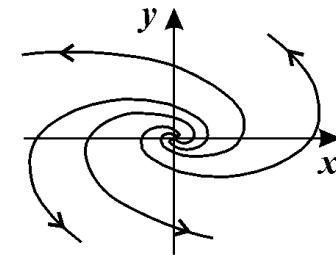
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



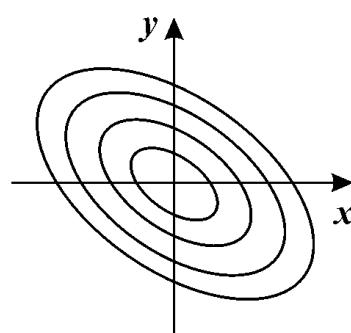
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



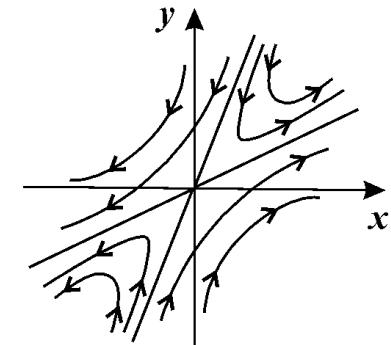
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)

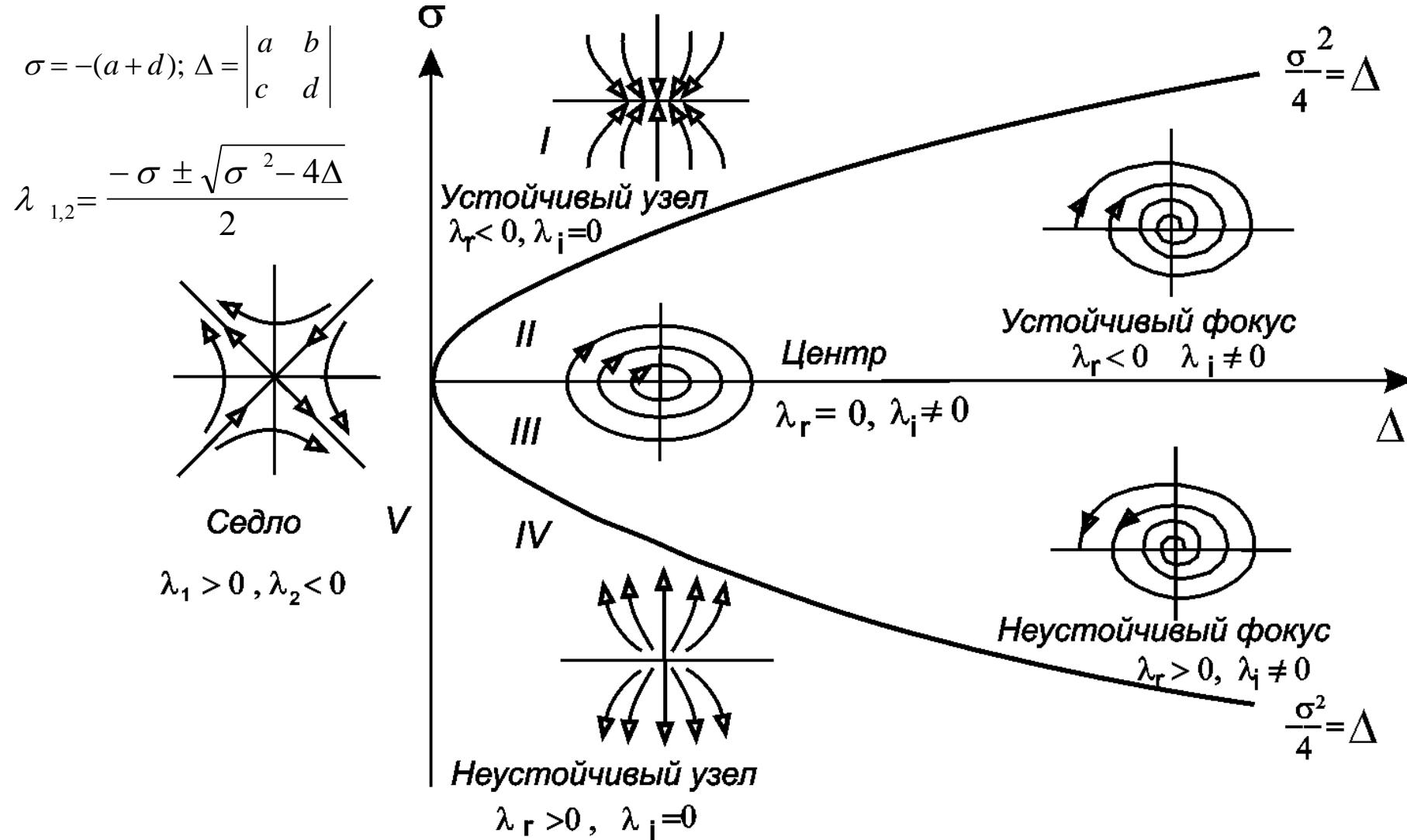


Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркационная диаграмма

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Фазово-параметрическая



Линеаризация системы общего вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} + \xi, \\ y &= \bar{y} + \eta.\end{aligned}$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$\begin{aligned}a &= P_x'(\bar{x}, \bar{y}), b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}), \\ c &= Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

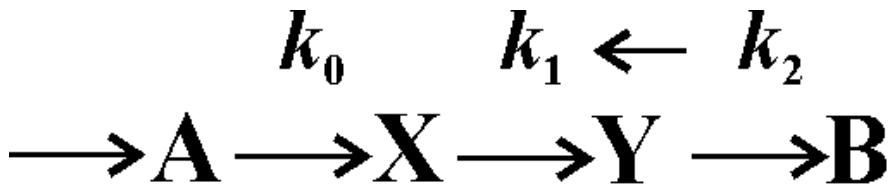
$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Если оба корня характеристического уравнения имеют **отрицательную** действительную часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия устойчиво*;

- если хотя бы один корень имеет **положительную** действительную часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия неустойчиво*.
- Если действительные части обоих корней характеристического уравнения равны нулю или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

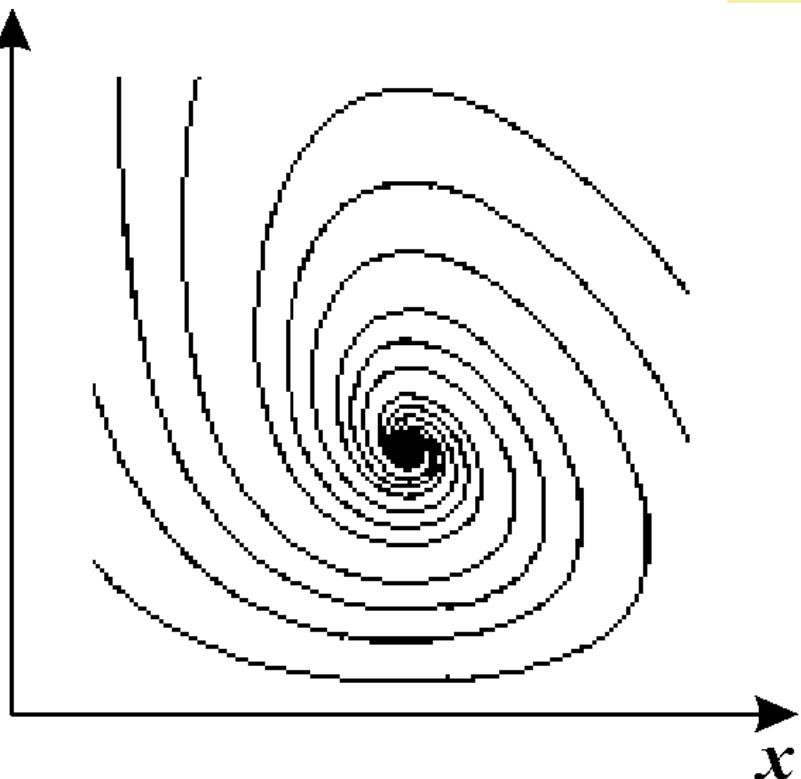


$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 xy - k_2 y, \\ \frac{dB}{dt} &= k_2 y. \end{aligned}$$

Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

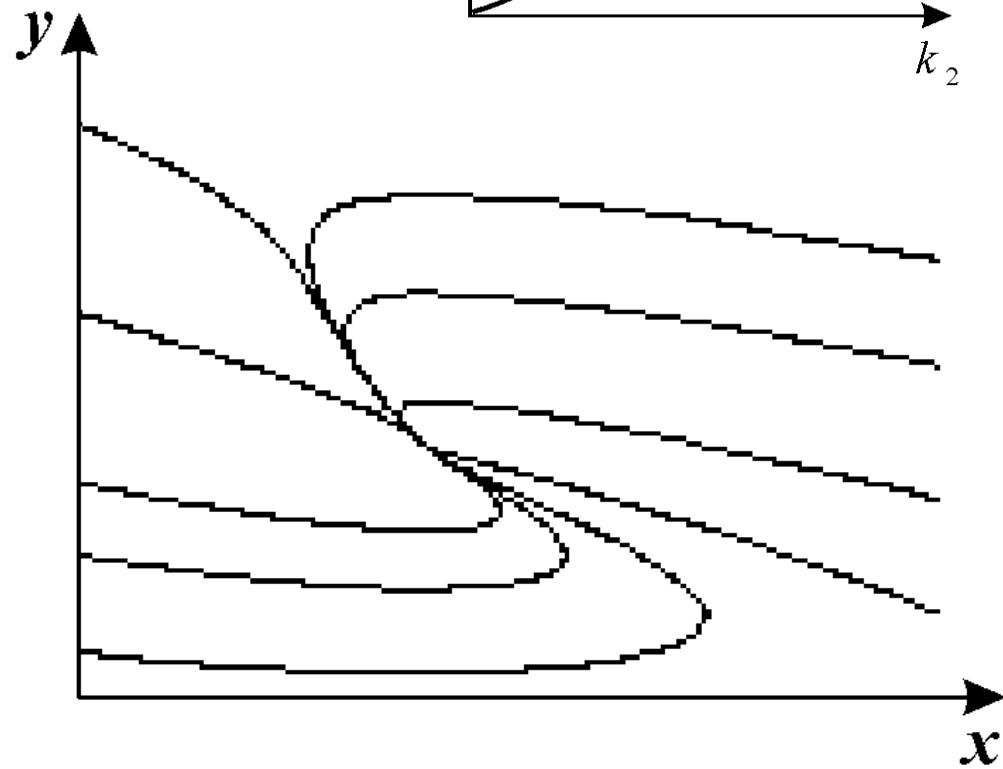
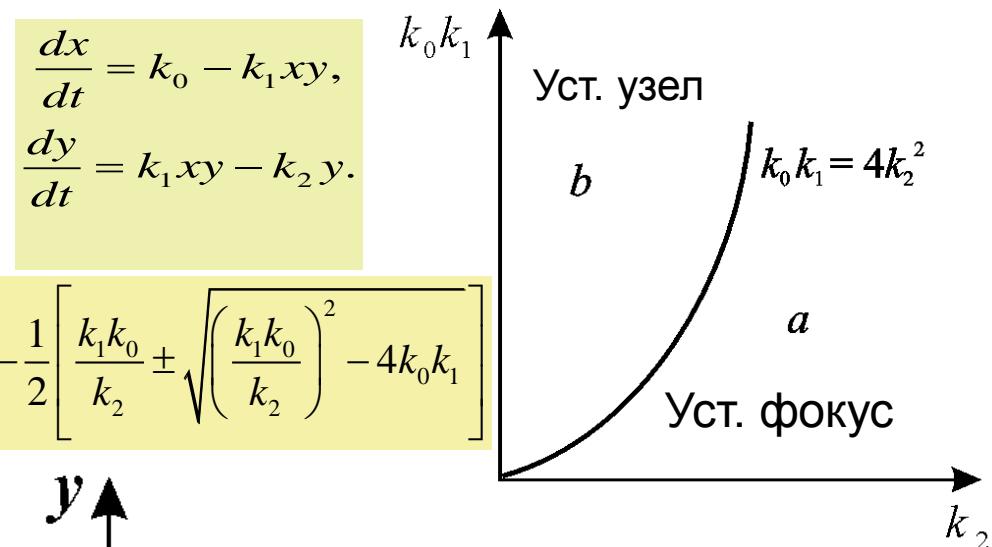
Фазовый портрет системы Лотки

а – устойчивый фокус,
б – устойчивый узел.



$$a$$

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



$$b$$

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

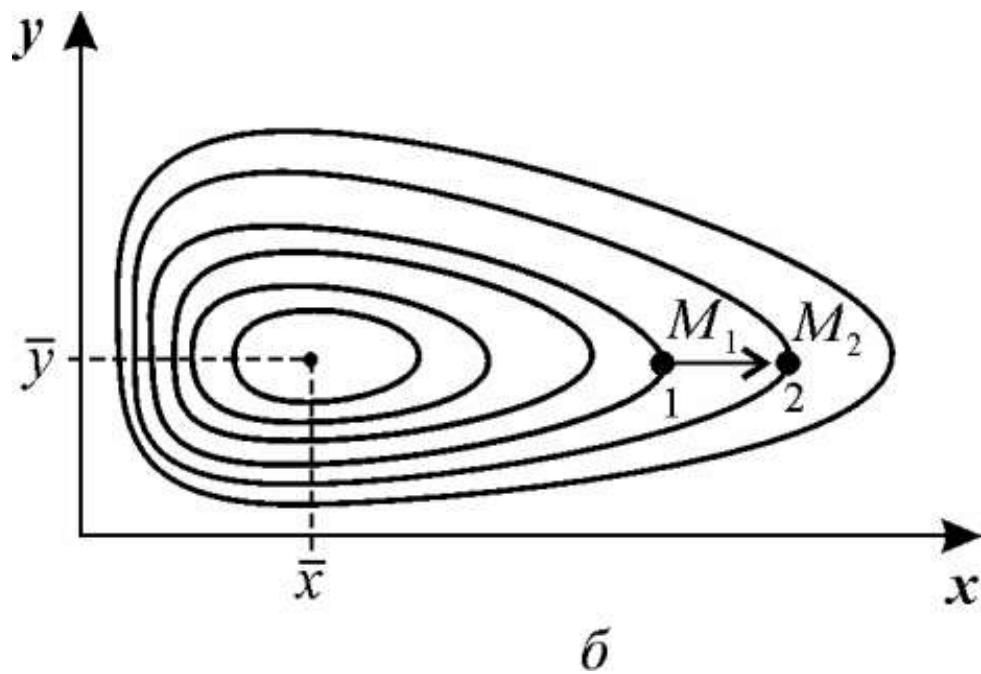
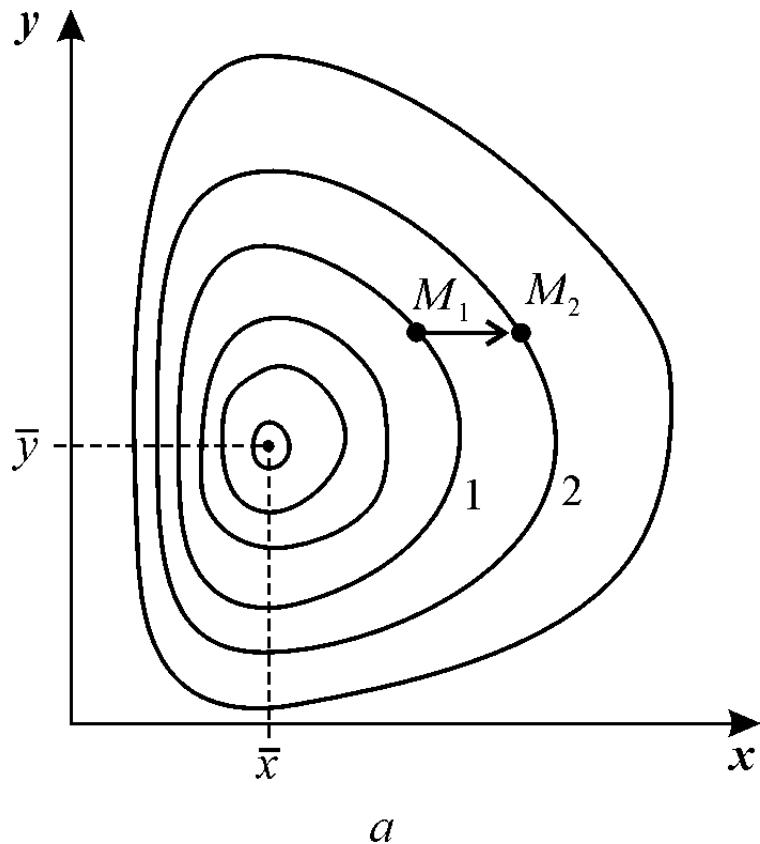
Х – численность жертв

Y – численность хищников



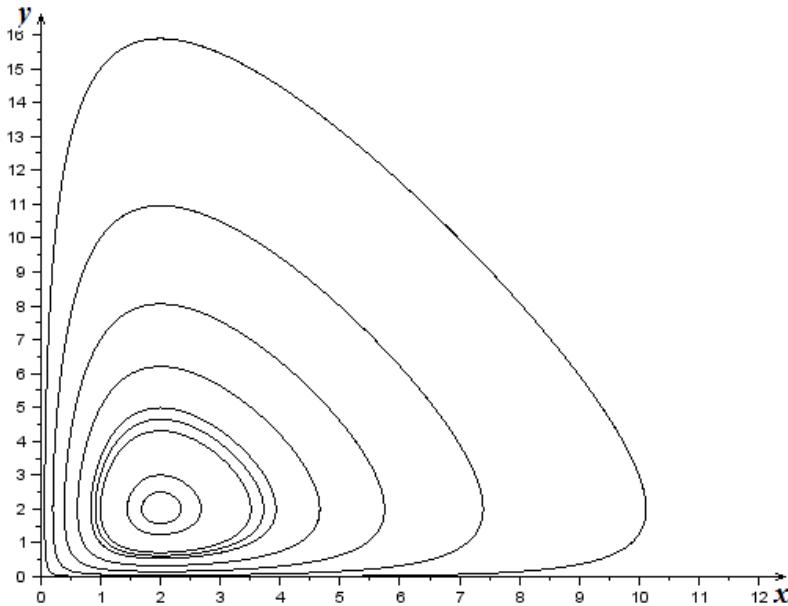
Вольтерра Вито (1860 — 1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



$$\varepsilon x = 4, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$

$$\varepsilon x = 2, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$



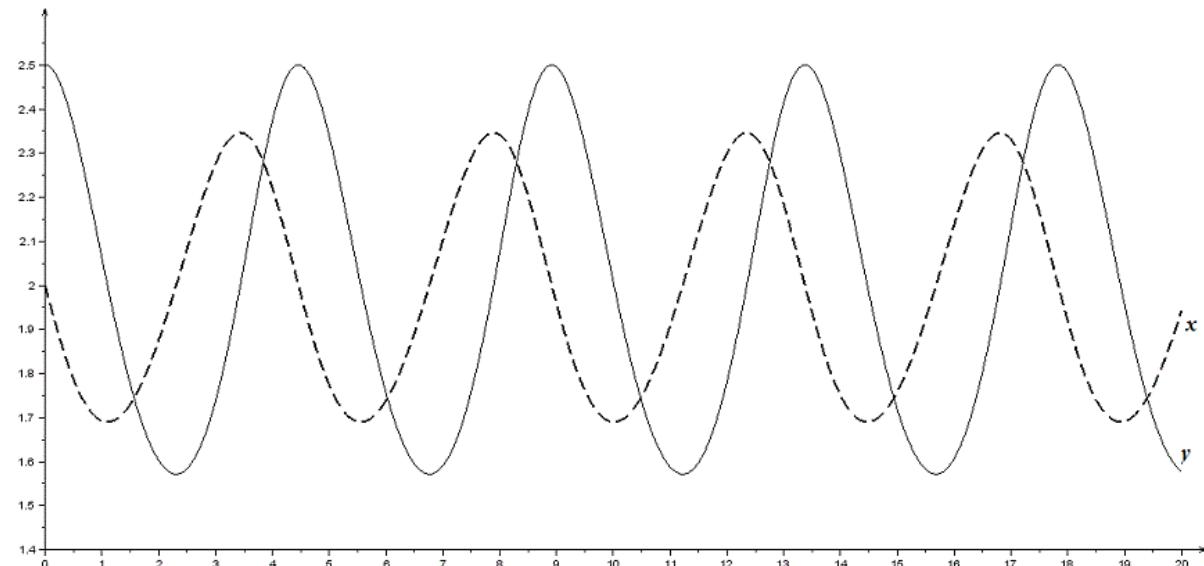
Volterra predator–prey model
describing continuous oscillations of
the population numbers.

(a) phase pattern;

(b) dependence of the numbers
of predators and preys on time.

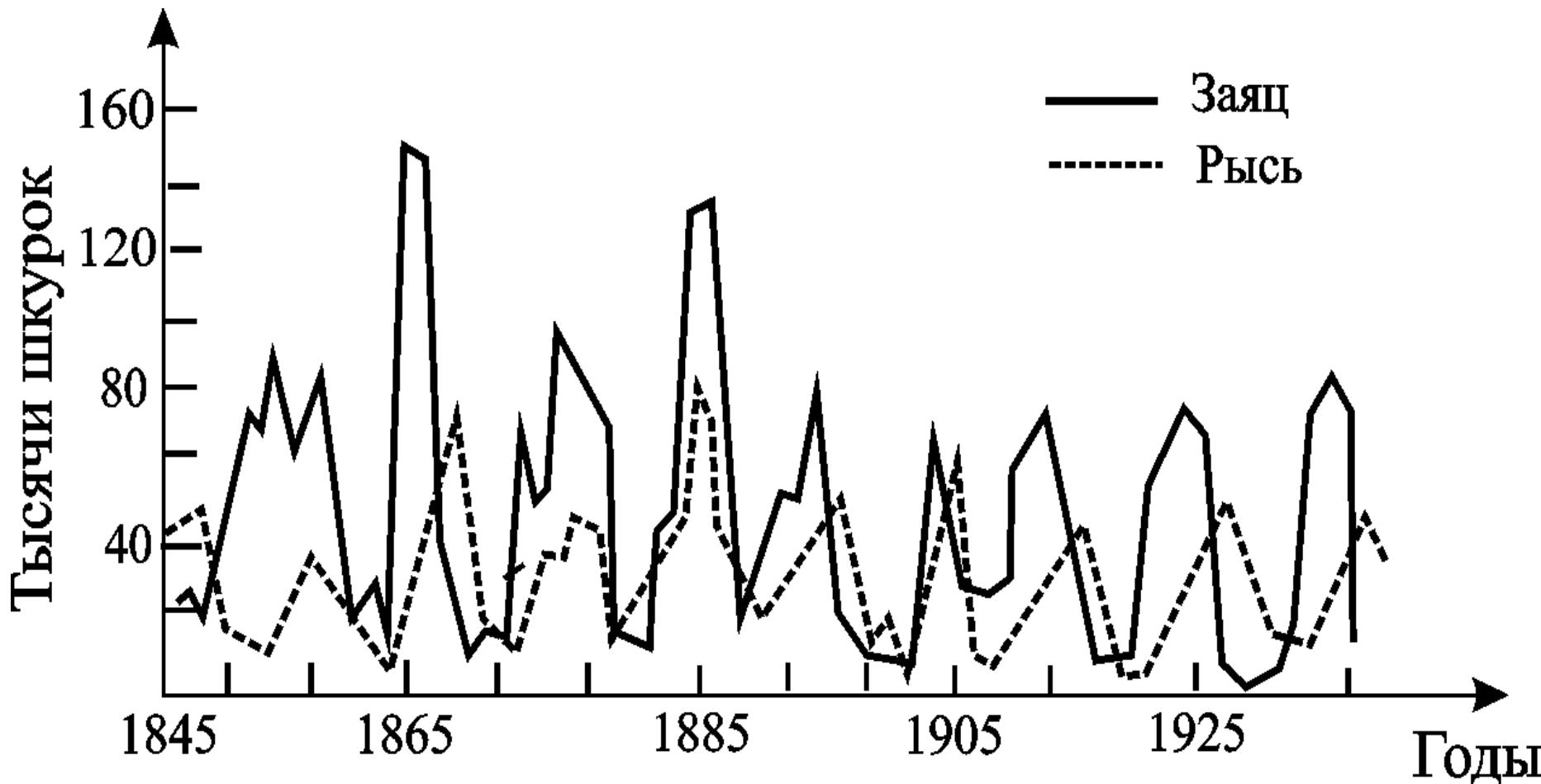
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= 1; b = 0.5; \\ c &= 1; d = 2\end{aligned}$$



Кривые численности зайца и рыси в Канаде

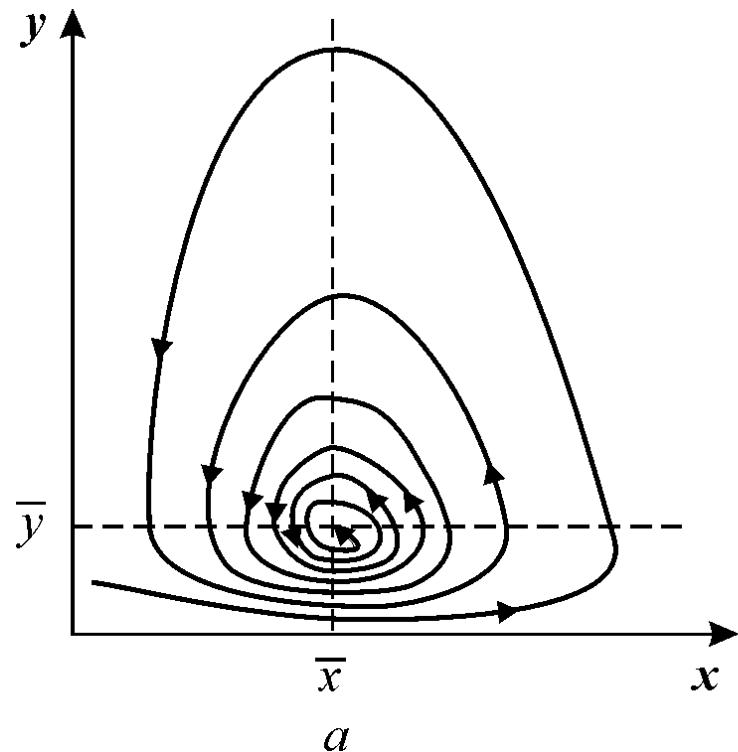
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



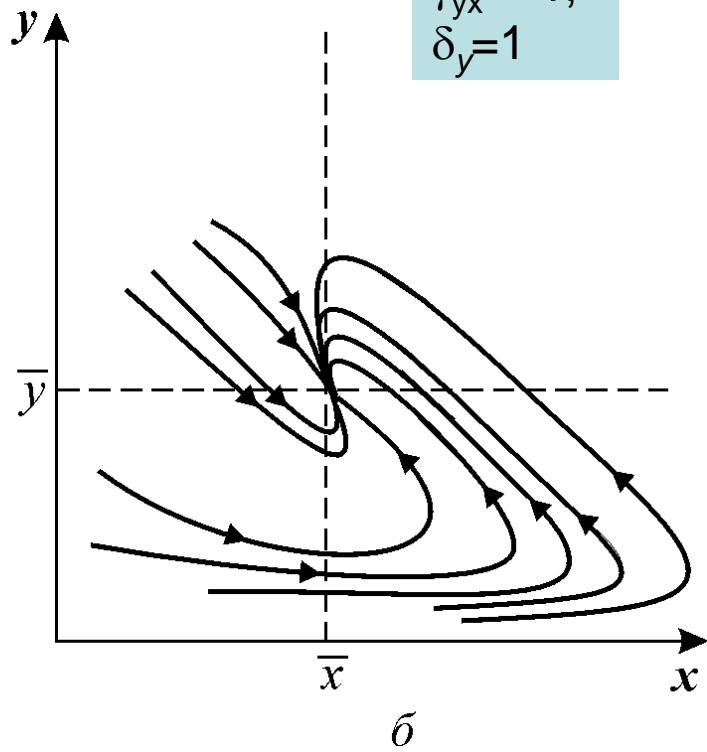
Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\varepsilon_x = 2,$$
$$\gamma_{xy} = 18,$$
$$\delta_x = 1,$$
$$\varepsilon_y = 3,$$
$$\gamma_{yx} = 5,$$
$$\delta_y = 1$$



$$\varepsilon_x = 2,$$
$$\gamma_{xy} = 1,$$
$$\delta_x = 1,$$
$$\varepsilon_y = 3,$$
$$\gamma_{yx} = 1,$$
$$\delta_y = 1$$



б